OPERAZIONI IN $\mathbb{Q}^+$

A proposito delle operazioni tra numeri razionali, affinché il passaggio da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$ risulti un vero e proprio ampliamento è necessario che avvengano tre cose:

1) le proprietà di ciascuna operazione devono rimanere immutate;
2) gli elementi neutri non devono cambiare;
3) i risultati delle operazioni tra numeri naturali devono corrispondere ai risultati tra i relativi numeri razionali.

Queste tre considerazioni ci permetteranno di *definire* i risultati di ciascuna operazione in $\mathbb{Q}^+$.

ADDIZIONE TRA RAZIONALI

L'addizione tra razionali è una operazione che a partire da due numeri razionali, detti *addendi*, ne costruisce un terzo detto *somma*.
La somma si definisce nel seguente modo:

1) se di due numeri razionali sono scritti con lo stesso denominatore allora il risultato è nuovo razionale che ha per denominatore **lo stesso denominatore degli addendi** e per numeratore **la somma dei numeratori degli addendi**.

   Esempio $\frac{9}{7}+\frac{3}{7}=\frac{9+3}{7}=\frac{12}{7}$

   In simboli $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ con $a,b,c\in\mathbb{N}$ e $b\neq 0$

2) se i due numeri razionali non sono scritti con lo stesso denominatore allora *prima li si riduce allo stesso denominatore* poi si procede come nel caso precedente.

   Esempio $\frac{7}{6}+\frac{3}{10}=\frac{35}{30}+\frac{9}{30}=\frac{35+9}{30}=\frac{44}{30}=\frac{\cancel{44}^{22}}{\cancel{30}_{15}}=\frac{22}{15}$

NB$_1$ – come si può osservare dall'ultimo esempio, anche se gli addendi sono frazioni ridotte ai minimi termini, la somma potrebbe essere una frazione non ridotta (e dunque da ridurre).

NB$_2$ – è spesso utile, prima di ridurre due numeri razionali allo stesso denominatore, ridurre le frazioni ai minimi termini

NB$_3$ – l'operazione di cui stiamo parlando è la *somma tra razionali* (non tra frazioni): quando riduciamo allo stesso denominatore due addendi, a cambiare sono le frazioni e *non i numeri razionali corrispondenti* (cioè le quantità rappresentate dalle frazioni).

NB$_4$ – l'addizione tra razionali è una operazione interna a $\mathbb{Q}^+$ (cioè il risultato è sempre un numero razionale) in quando ridurre due frazioni allo stesso denominatore (e quindi, poi, sommarle) è *sempre* possibile.

Elemento Neutro

Anche in $\mathbb{Q}^+$ l'*elemento neutro* dell'addizione è lo **zero**.

Infatti $\quad a+0=0+a=a \quad$ con $\quad a\in\mathbb{Q}^+$

Esempio $\quad \frac{7}{5}+0=0+\frac{7}{5}=\frac{7}{5}+\frac{0}{5}=\frac{0}{5}+\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$

NB – quando scriviamo 0 intendiamo il numero razionale $\frac{0}{1}$ (ricordando che $\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{3}=...$)

Proprietà dell'addizione

In $\mathbb{Q}^+$ l'addizione gode delle stesse proprietà di cui godeva in $\mathbb{N}$.
Esse sono:

- ***la proprietà commutativa***

  In simboli $\quad a+b=b+a \quad$ con $\quad a,b\in\mathbb{Q}^+$

  Esempio $\quad \frac{5}{3}+\frac{7}{4}=\frac{7}{4}+\frac{5}{3}$

- ***la proprietà associativa***

  In simboli $\quad (a+b)+c=a+(b+c) \quad$ con $\quad a,b,c\in\mathbb{Q}^+$

  Esempio $\quad \left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}\right)+\frac{7}{2}=\frac{5}{3}+\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{2}\right)$

NB – è importante sottolineare che, nel passare da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$, le proprietà dell'addizione non cambiano proprio perché il calcolo del risultato è ridotto allo svolgimento di una somma tra numeri naturali.

Esempio $\quad \underbrace{\boxed{\frac{7}{6}+\frac{3}{10}}}_{\text{somma tra razionali}}=\frac{35}{30}+\frac{9}{30}=\frac{\underbrace{35+9}_{\text{somma tra naturali}}}{30}=\frac{44}{30}$

SOTTRAZIONE TRA RAZIONALI

La sottrazione tra razionali è una operazione che a partire da due numeri razionali, il primo detto *minuendo* e il secondo *sottraendo*, ne costruisce un terzo detto *differenza*.
La definizione di differenza tra razionali è identica a quella di differenza tra naturali: la differenza tra due numeri razionale è quel (terzo) numero razionale che sommato al sottraendo dà il minuendo.

In simboli $a-b=c$ solo se $c+b=a$ con $a,b,c\in\mathbb{Q}^{+}$ e $a\geq b$

Esempio $\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ perché $\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

Per calcolare la differenza tra due numeri razionali basta procedere esattamente come per la loro somma, ma sostituendo le eventuali addizioni con sottrazioni.

Esempio $\frac{9}{7}-\frac{3}{7}=\frac{9-3}{7}=\frac{6}{7}$

In simboli $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ con $a,b,c\in\mathbb{N}$, $b\neq 0$ e $a\geq c$

Pertanto, qualora i due razionali avessero denominatori diversi, anche in questo caso, bisognerà prima ridurli al comun denominatore.

NB$_1$ – anche in questo caso il calcolo del risultato è ridotto allo svolgimento di una differenza tra numeri naturali.

Proprietà della sottrazione

In $\mathbb{Q}^{+}$ la sottrazione gode delle stesse proprietà di cui godeva in $\mathbb{N}$.

Dunque:

1) la sottrazione NON HA ELEMENTO NEUTRO (lo zero non è neutro perché non vale la commutativa);
2) la sottrazione NON È UNA OPERAZIONE INTERNA ALL'INSIEME $\mathbb{Q}^{+}$;
3) la sottrazione gode della sola **PROPRIETÀ INVARIANTIVA**.

NB – se non ricordi il significato anche solo di una delle precedenti affermazioni, vattele a studiare!!

MOLTIPLICAZIONE TRA RAZIONALI

La moltiplicazione tra razionali è una operazione che a partire da due numeri razionali, detti *fattori*, ne costruisce un terzo detto *prodotto*.

Il prodotto tra razionali è un nuovo razionale che ha per numeratore il prodotto dei numeratori dei fattori e per denominatore il prodotto dei denominatori dei fattori.

Esempio $\frac{9}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{27}{35}$

In simboli $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$, $d \neq 0$

NB$_1$ – se i fattori sono frazioni ridotte ai minimi termini, il prodotto potrebbe essere una frazione non ridotta (e dunque da ridurre).

NB$_2$ – è spesso utile, prima di svolgere la moltiplicazione, ridurre le frazioni ai minimi termini

NB$_3$ – è importante sottolineare che, nel passare da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$, il calcolo del risultato è ridotto allo svolgimento di due prodotti tra numeri naturali.

NB$_4$ – la moltiplicazione tra razionali è una operazione interna a $\mathbb{Q}^+$ (cioè il risultato è sempre un numero razionale) in quando il prodotto tra due numeri naturali è *sempre* un numero naturale.

NB$_5$ – è possibile ottenere il prodotto già ridotto ai minimi termini ricordando che è sempre possibile (come conseguenza della proprietà commutativa in $\mathbb{N}$) semplificare UN QUALUNQUE NUMERATORE CON UN QUALUNQUE DENOMINATORE. Quando tutte le possibili semplificazioni saranno state esaurite, allora il prodotto sarà sicuramente ridotto ai minimi termini.

Esempio $\frac{9}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{{}^{3}\cancel{9}}{4} \cdot \frac{5}{\cancel{6}_{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$

Lo Zero e l'Uno in $\mathbb{Q}^+$

Anche in $\mathbb{Q}^+$ l'*elemento neutro* della moltiplicazione è l'**uno**.

Infatti $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ con $a \in \mathbb{Q}^+$

Esempio $\frac{7}{5} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{5}$

NB$_1$ – quando scriviamo 1 intendiamo il numero razionale $\frac{1}{1}$ (ricordando che $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = ...$)

Anche in $\mathbb{Q}^+$ l'*elemento annullante* della moltiplicazione è lo **zero**.

Infatti $\quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad$ con $\quad a \in \mathbb{Q}^+$

Esempio $\quad \frac{7}{5} \cdot 0 = 0 \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{5} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{1} \cdot \frac{7}{5} = \frac{0}{5} = 0$

NB$_2$ – quando scriviamo 0 intendiamo il razionale $\frac{0}{1}$ (ricordando che $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \ldots$)

Anche in $\mathbb{Q}^+$ vale la **legge di annullamento del prodotto**. Essa afferma che *se il prodotto di due numeri razionale è zero allora* <u>almeno</u> *uno di essi è uguale a zero*.

In simboli $\quad a \cdot b = 0 \quad$ solo se $\quad a = 0 \quad$ oppure $\quad b = 0 \quad$ con $\quad a, b \in \mathbb{Q}^+$

Proprietà della moltiplicazione

In $\mathbb{Q}^+$ la moltiplicazione gode delle stesse proprietà di cui godeva in $\mathbb{N}$.
Esse sono:

- ***la proprietà commutativa***

  In simboli $\quad a \cdot b = b \cdot a \quad$ con $\quad a, b \in \mathbb{Q}^+$

  Esempio $\quad \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{3}$

- ***la proprietà associativa***

  In simboli $\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad$ con $\quad a, b, c \in \mathbb{Q}^+$

  Esempio $\quad \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{7}{2} = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2}\right)$

- ***le proprietà distributive***

  In simboli $\quad (a \pm b) \cdot c = c \cdot (a \pm b) = a \cdot c \pm b \cdot c \quad$ con $\quad a, b, c \in \mathbb{Q}^+$

  Esempio $\quad \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{7}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2}$

NB$_1$ – il simbolo $\pm$ indica sia $+$ sia $-$.

NB$_2$ – le proprietà distributive sono della MOLTIPLICAZIONE *rispetto* all'addizione e alla sottrazione.

NB$_3$ – le proprietà distributive sono 4 (due *destre* e due *sinistre*).

Numeri razionali INVERSI

Due numeri razionali si dicono **inversi** quando il loro prodotto è **UNO**.

Esempio $\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{14}=\frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{3}_{1}}\cdot\frac{\cancel{6}^{\cancel{2}^{1}}}{\cancel{14}_{\cancel{2}^{1}}}=\frac{1}{1}=1$ (dunque $\frac{7}{3}$ e $\frac{6}{14}$ sono inverse l'una dell'altra)

NB$_1$ – è semplice osservare che due frazioni aventi il numeratore della prima uguale al denominatore della seconda e il denominatore della seconda uguale al numeratore della prima rappresentano sempre numeri razionali inversi.

Esempio $\frac{5}{3}$ è inversa di $\frac{3}{5}$ (e viceversa)

NB$_2$ – ovviamente per trovare l'inverso di un numero razionale basta scambiare di posto il numeratore con il denominatore.

NB$_2$ – **ogni numero razionale, <u>tranne lo zero</u>, ammette un inverso** (infatti un numero razionale non può avere denominatore uguale a zero).

DIVISIONE TRA RAZIONALI

La divisione tra razionali è una operazione che a partire da due numeri razionali, il primo detto *dividendo* e il secondo *divisore*, ne costruisce un terzo detto *quoziente*.

La definizione di quoziente tra razionali è identica a quella di quoziente tra naturali: il quoziente tra due numeri razionali è quel (terzo) numero razionale che moltiplicato per il divisore dà il dividendo.

In simboli $a:b=c$ solo se $c\cdot b=a$ con $a,b,c\in\mathbb{Q}^{+}$

Esempio $\frac{5}{3}:\frac{4}{7}=\frac{35}{12}$ perché $\frac{35}{12}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5}{3}$ (infatti $\frac{35}{12}\cdot\frac{4}{7}=\frac{\cancel{35}^{5}}{\cancel{12}_{3}}\cdot\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{7}_{1}}=\frac{5}{3}$)

È possibile osservare facilmente che **il quoziente tra due numeri razionali è sempre uguale al prodotto tra il dividendo (primo termine) e l'inverso del divisore (secondo termine).**

Esempio $\frac{5}{3}:\frac{4}{7}=\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{4}=\frac{35}{12}$

In simboli $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ con $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ e $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$

Proprietà della divisione

In $\mathbb{Q}^+$ la divisione gode (quasi) delle stesse proprietà di cui godeva in $\mathbb{N}$.

Dunque:

1) la divisione NON HA ELEMENTO NEUTRO (l'uno non è neutro perché non vale la commutativa);
2) la divisione **È UNA OPERAZIONE INTERNA ALL'INSIEME** $\mathbb{Q}^+$ (infatti, se ogni divisione può essere trasformata in una moltiplicazione, allora il quoziente sarà sempre razionale);
3) la divisione gode della **PROPRIETÀ INVARIANTIVA**;
4) la divisione gode delle **PROPRIETÀ DISTRIBUTIVE** (esclusivamente **destre** rispetto all'addizione e alla sottrazione)
5) **i casi particolari della divisione restano immutati**: se il divisore è 1 allora il quoziente è uguale al dividendo, se il dividendo è uguale al divisore il quoziente è sempre 1, se il dividendo è 0 (ma il divisore è diverso da zero) il quoziente è zero, se il divisore è 0 la divisione è impossibile, se il dividendo e il divisore sono entrambi 0 la divisione è indeterminata.

   In simboli $a:a=1$ con $a \in \mathbb{Q}^+$

   $a:1=a$

   $0:a=0$ con $a \neq 0$

   $a:0=IMPOSSIBILE$

   $0:0=INDETERMINATA$

NB – siccome ogni divisione può essere trasformata in moltiplicazione, allora si può pensare che moltiplicazione e divisione siano due facce di un'unica medaglia, come dire siano due modi di scrivere la stessa operazione.

A proposito di espressioni

Siccome nel passaggio da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$ le proprietà restano sostanzialmente invariate, il procedimento per risolvere una espressione è sempre lo stesso: prima le tonde, poi le quadre, poi le graffe.
Tuttavia dentro ciascuna parentesi **prima si trasformano tutte le divisioni in moltiplicazioni**, poi si svolgono le moltiplicazioni, poi le addizioni e le sottrazioni nell'ordine in cui sono scritte.

A proposito di problemi

Le moltiplicazioni e divisioni tra razionali possono essere utilizzate per risolvere alcuni problemi:

1) *se, data una quantità, si vuole calcolarne una parte frazionaria basta moltiplicare tale quantità per la frazione*;

   Esempio

   Calcola i $\frac{4}{3}$ di 18.

   $\frac{4}{3}$ di 18 = $\frac{4}{3}\cdot\frac{18}{1}=\frac{4}{\cancel{3}_1}\cdot\frac{\cancel{18}^6}{1}=\frac{24}{1}=24$

   Dunque $\frac{4}{3}$ di 18 = 24

2) *se si conosce una quantità, corrispondente ad una nota parte frazionaria, per trovare l'intero basta dividere la quantità nota per la frazione.*
   Esempio

   I $\frac{4}{3}$ di una quantità valgono 20, calcola la quantità.

   $\frac{4}{3}$ sono 20 = $\frac{20}{1}:\frac{4}{3}=\frac{20}{1}\cdot\frac{3}{4}=\frac{^5\cancel{20}}{1}\cdot\frac{3}{\cancel{4}_1}=\frac{15}{1}=15$

   Dunque se i $\frac{4}{3}$ sono 20, la quantità totale è 15.

Considerazioni Conclusive

Come si può osservare dagli esempi e dai problemi svolti, passare da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$ introduce alcune novità.

La divisione è operazione interna a $\mathbb{Q}^+$.

1) Non è più vero che moltiplicare una quantità per un numero (razionale) fornisce un risultato maggiore di tale numero (a volte è minore).
2) Non è più vero che dividere una quantità per un numero (razionale) fornisce un risultato minore di tale numero (a volte è maggiore).
3) Dati due numeri razionali è sempre possibile trovarne un terzo compreso tra essi (ossia compresi tra due razionali esistono infiniti altri razionali.

L'ultima novità si esprime dicendo che $\mathbb{Q}^+$ è DENSO